

Seja $f : A \rightarrow A$ uma função injetora tal que $f(A) \neq A$. Tomando $x \in A - f(A)$, mostre que $x, f(x), f(f(x)), \dots$ são distintos aos pares.

Seja $f : A \rightarrow A$ uma função injetora, com A um conjunto finito. Mostre que f é sobrejetora.

PROPOSTAS E/OU SOLUÇÕES

SEÇÃO 2.2

Pelo item (a), obtemos $A \cup B \subseteq X$. Por outro lado, pondo $Y = A \cup B$, temos, pelo item (2) do Teorema 2.3, que $A \subseteq Y$ e $B \subseteq Y$. Assim, pelo item (b), obtemos $X \subseteq Y = A \cup B$. Portanto, $X = A \cup B$.

Sejam A, B subconjuntos de U e X um subconjunto de U com as seguintes propriedades:

- (a) $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$.
- (b) Se $Y \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, então $Y \subseteq X$, para todo $Y \subseteq U$.

Mostre que $X = A \cap B$. Agora, faça a prova.

. Vamos provar apenas o item (a).

$$\begin{aligned} \forall x [x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in C \\ \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in D \Rightarrow x \in B \cup D]. \end{aligned}$$

Portanto, $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.

. Vamos provar apenas o item (j).

$$\begin{aligned} \forall x [x \in A \cap (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ e } x \notin A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) - (C \cap A)]. \end{aligned}$$

Portanto, $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (C \cap A)$.

e

$$\begin{aligned} x > 0 &\Leftrightarrow -x < 0 \\ \Leftrightarrow f(x) = f(-1 \cdot (-x)) &= f(-1) \cdot f(-x) = -1 \cdot (-x) = x. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, isto é, $f = I_{\mathbb{Z}}$.

28. Pelo Exercício anterior, obtemos $f = 0$ ou $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Agora, dado $y \in \mathbb{Z}$, com $y \neq 0$, obtemos

$$1 = f(1) = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = y \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}.$$

Finalmente, dado $r = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, com $y \neq 0$, obtemos

$$f(r) = f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} = r.$$

Portanto, $f = I_{\mathbb{Q}}$.

29. Como f é injetora temos, pelo Exemplo 2.25, que

$$f(A - A) = f(A) - f(A) \neq \emptyset \Rightarrow f(f(A)) \neq f(A).$$

Portanto,

$$x, f(x), f(f(x)), \dots$$

são distintos aos pares.

30. Se $f(A) \neq A$, então pelo Exercício anterior A seria um conjunto infinito.

$$x < 0 \Rightarrow -x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(-1 \cdot (-x)) = f(-1)(-x) = -f(1)(-x) = x.$$

Portanto, $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, isto é, $f = I_{\mathbb{Z}}$.

Pelo Exercício anterior, obtemos $f = 0$ ou $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Agora, dado $y \in \mathbb{Z}$, com $y \neq 0$, obtemos

$$1 = f(1) = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = y \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}.$$

Finalmente, dado $r = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, com $y \neq 0$, obtemos

$$f(r) = f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} = r.$$

Portanto, $f = I_{\mathbb{Q}}$.

Como f é injetora temos, pelo Exemplo 2.25, que

$$f(A - f(A)) = f(A) - f(f(A)) \neq \emptyset \Rightarrow f(f(A)) \neq f(A).$$

Portanto,

$$x, f(x), f(f(x)), \dots$$

são distintos aos pares.

0. Se $f(A) \neq A$, então pelo Exercício anterior A seria um conjunto infinito.

Capítulo 3

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Com os conhecimentos adquiridos estudaremos os problemas de aplicação de ordem, conjuntos parcialmente ordenados, maior e menor elemento, etc. estudaremos reticulados e...

Já vimos que a ideia intuitiva era significativa para qualquer conjunto parcialmente ordenado. porém, estaremos interessados em conjuntos parcialmente ordenados e suas propriedades.

Da mesma forma que o conceito de conjunto parcialmente ordenado pode ser aplicado em diversas situações-problema.

6. Suponhamos que exista uma função $h : C \rightarrow B$ tal que $f = g \circ h$. Então

$$\begin{aligned} \forall y [y \in \text{Im}(f) &\Rightarrow \exists x \in C \text{ tal que } y = f(x) \\ &\Rightarrow \exists x \in C \text{ tal que } y = (g \circ h)(x) \Rightarrow (x, y) \in g \circ h \\ &\Rightarrow \exists z \in C \text{ tal que } (x, z) \in h \text{ e } (z, y) \in g \\ &\Rightarrow y \in \text{Im}(g)]. \end{aligned}$$

Reciprocamente, a função $h : C \rightarrow B$ definida como $h(x) = g^{-1}(f(x))$ tem as propriedades desejadas, pois para qualquer $x \in C$, obtemos

$$f(x) = I_A(f(x)) = (g \circ g^{-1})(f(x)) = g(g^{-1} \circ f)(x) = (g \circ h)(x).$$

Seja $h_1 : C \rightarrow B$ outra função com a mesma propriedade de h . Então

$$\begin{aligned} h_1 &= I_B \circ h_1 = (g^{-1} \circ g) \circ h_1 = g^{-1} \circ (g \circ h_1) \\ &= g^{-1} \circ f = g^{-1} \circ (g \circ h) = (g^{-1} \circ g) \circ h = I_B \circ h \\ &= h. \end{aligned}$$

Primeiro note que

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

e

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) \Rightarrow f(-1) = -f(1).$$

Segundo

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \\ &\Rightarrow f(1) \cdot (f(1) - 1) = 0 \\ &\Rightarrow f(1) = 0 \text{ ou } f(1) = 1. \end{aligned}$$

Se $f(1) = 0$, então $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, isto é, $f = 0$. Agora, se $f(1) = 1$, então, pela Lei da Tricotomia, dado $x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$. Assim,

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = x f(1) = x$$

($c \Rightarrow a$) Suponhamos, por absurdo, que f não seja injetora. Então, pelo Exemplo 2.25, existe $X \subseteq A$ tal que

$$f(A) - f(X) \subset f(A - X).$$

Como $f(A) \subseteq B$ temos que

$$f(A) - f(X) \subseteq B - f(X)$$

(prove isto!). Portanto,

$$f(A - X) \not\subseteq B - f(X),$$

o que é uma contradição.

24. Vamos provar apenas o item (a).

$$\begin{aligned} \forall (x, y) [(x, y) \in (g \circ f)|_X &\Leftrightarrow (x, y) \in g \circ f \text{ e } x \in X \\ &\Leftrightarrow \exists z \text{ tal que } (x, z) \in f \text{ e } (z, y) \in g \text{ e } x \in X \\ &\Leftrightarrow \exists z \text{ tal que } ((x, z) \in f \text{ e } x \in X) \text{ e } (z, y) \in g \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in g \circ (f|_X)]. \end{aligned}$$

Portanto, $(g \circ f)|_X = g \circ (f|_X)$.

25. Suponhamos que exista uma função $h : B \rightarrow C$ tal que $f = h \circ g$. Então

$$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = h(g(x)) = h(g(y)) = f(y), \quad \forall x, y \in A.$$

Reciprocamente, seja $c \in C$ fixado. Então a função $h : B \rightarrow C$ definida como

$$h(y) = \begin{cases} f(x), & \text{se } y = g(x) \\ c, & \text{se } y \neq g(x) \end{cases}$$

tem as propriedades desejadas, pois para qualquer $x \in A$, obtemos

$$f(x) = h(y) = h(g(x)) = (h \circ g)(x).$$

Seja $h_1 : B \rightarrow C$ outra função com a mesma propriedade de h . Então, pelo Exercício 20, $h = h_1$.

26. Suponhamos que exista um

$$\begin{aligned} \forall y [y \in \text{Im}(f) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x \in C \\ &\Rightarrow \exists z \in C \\ &\Rightarrow y \in \text{Im}(g) \end{aligned}$$

Reciprocamente, a função tem as propriedades desejadas

$$f(x) = I_A(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Seja $h_1 : C \rightarrow B$ outra função

$$\begin{aligned} h_1 &= I_B \circ h_1 = \\ &= g^{-1} \circ f = \\ &= h. \end{aligned}$$

27. Primeiro note que

$$f(0) = f(1)$$

e

$$0 = f(0) = f(1) =$$

Segundo

$$f(1)$$

Se $f(1) = 0$, então $f(x)$ isto é, $f = 0$. Agora, se $x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$ ou $x = 0$ ou

$$x > 0 \Rightarrow f(x)$$

$y_0 \neq f(x)$, para todo $x \in A$. Para qualquer $b \in B$ fixado, com $b \neq y_0$, consideremos a função $g : B \rightarrow B$ definida como

$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y \neq y_0 \\ b, & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

e seja $h = I_B$. Então

$$f(x) = (g \circ f)(x) \text{ e } f(x) = (h \circ f)(x), \quad \forall x \in A,$$

isto é, $g \circ f = h \circ f$. Logo, $g = h$, o que é uma contradição.

($c \Rightarrow a$) Pondo $X = A$, obtemos

$$B - f(A) \subseteq f(A - A) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

Assim, $f(A) = B$, ou seja, f é sobrejetora.

($a \Rightarrow b$) Dado $x \in C$,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (f \circ g)(x) = (f \circ h)(x) = f(h(x)) \\ &\Rightarrow g(x) = h(x). \end{aligned}$$

Portanto, $g = h$.

($b \Rightarrow c$) Suponhamos, por absurdo, que exista $X \subseteq A$ tal que $f(A - X) \not\subseteq B - f(X)$, isto é, existe $y_0 \in f(A - X)$ tal que $y_0 \notin B - f(X)$. Então existem $a \in A - X$ e $x_0 \in X$ tais que $f(a) = y_0 = f(x_0)$. Consideremos a função $h : A \rightarrow A$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in A - \{a, x_0\} \\ x_0, & \text{se } x = a \\ a, & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

e seja $g = I_A$. Então

$$f(x) = (f \circ g)(x) \text{ e } f(x) = (f \circ h)(x), \quad \forall x \in A,$$

isto é, $f \circ g = f \circ h$. Logo, $g = h$, o que é uma contradição.

ou seja, se $y > 0$, então existe

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \in \mathbb{R}$$

tal que $y = f(x)$. A possibilidade $y < 0$ é tratada de modo inteiramente análogo. Portanto, f é bijetora. Note que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Finalmente, é fácil verificar que a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

é a inversa de f .

Basta considerar $f = I_B$.

Suponhamos, por absurdo, que $g \neq h$. Então existe $x_0 \in A$ tal que $g(x_0) \neq h(x_0)$. Consideremos a função $f : B \rightarrow \{g(x_0), h(x_0)\}$ definida como

$$f(y) = \begin{cases} h(x_0), & \text{se } y \in B - \{h(x_0)\} \\ g(x_0), & \text{se } y = h(x_0). \end{cases}$$

Então

$$(f \circ g)(x_0) = h(x_0) \text{ e } (f \circ h)(x_0) = g(x_0) \Rightarrow (f \circ g)(x_0) \neq (f \circ h)(x_0),$$

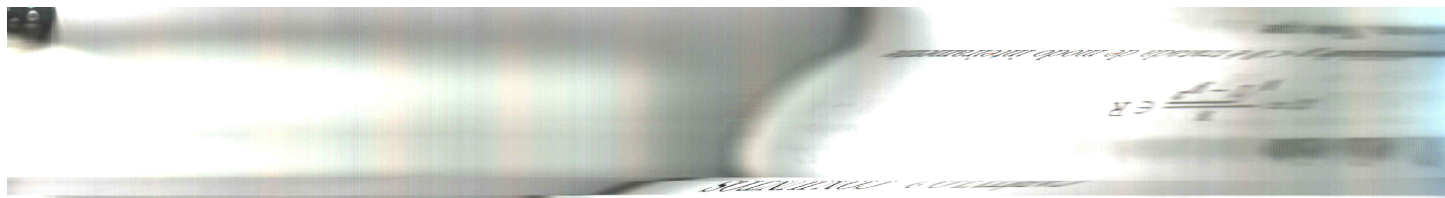
o que é uma contradição.

2. ($a \Rightarrow b$) Dado $x \in B$, existe $a \in A$ tal que $x = f(a)$. Logo,

$$g(x) = g(f(a)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(a)) = h(x).$$

Portanto, $g = h$.

($b \Rightarrow c$) Suponhamos, por absurdo, que exista $X \subseteq A$ tal que $B - f(X) \not\subseteq f(A - X)$, isto é, existe $y_0 \in B - f(X)$ tal que $y_0 \notin f(A - X)$. Então



é uma partição de $\mathbb{N}$. Assim, basta considerar a função $g_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$g_k(n) = \begin{cases} 2n-1, & \text{se } 1 \leq n < k \\ 2n, & \text{se } n \geq k, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é arbitrário (infinitas possibilidades). Se existisse inversa à esquerda, então f seria injetora, o que é impossível.

9. Vamos provar apenas o item (c). Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $f(x) = f(y)$, então

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Como os denominadores destas frações são positivos temos as seguintes possibilidades: $x = y = 0$ ou $x > 0$ e $y > 0$ ou $x < 0$ e $y < 0$. A primeira

possibilidade é clara. Se $x > 0$ e $y > 0$, então

$$\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}.$$

Logo, elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1+x^2} &= \frac{y^2}{1+y^2} \Rightarrow x^2 = y^2 \\ \Rightarrow x &= |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} = |y| = y. \end{aligned}$$

A possibilidade $x < 0$ e $y < 0$ é tratada de modo inteiramente análogo. Portanto, $x = y$, ou seja, f é injetora. Para provar que f é sobrejetora, dado $y \in I$, devemos resolver a equação $y = f(x)$ para obter x como função de y . Para isso, devemos considerar as seguintes possibilidades: $y = 0$ ou $y > 0$ ou $y < 0$. Se $y = 0$, então existe $x = 0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 = f(0)$. Se $y > 0$, então $x > 0$ e

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{x^2}{1+x^2} \\ \Rightarrow x &= \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

Suponhamos que $f : A \rightarrow B$ seja injetora. Então, pelo Corolário 3.53, $f : A \rightarrow C$ é uma função bijetora, onde $C = \text{Im}(f) \subseteq B$. Assim, $f^{-1} : C \rightarrow A$ é uma função. Seja $a \in A$ fixado. Então a função $g : B \rightarrow A$ definida como

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{se } y \in C \\ a, & \text{se } y \notin C, \end{cases}$$

tem as propriedades desejadas, pois para qualquer $x \in A$, obtemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x = I_A(x).$$

6. Pelo Exercício anterior, basta considerar a função $g_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$g_k(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } n > 1 \\ k, & \text{se } n = 1, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é arbitrário (infinitas possibilidades). Se existisse inversa à direita, então f seria sobrejetora, o que é impossível.

17. Suponhamos que $f : A \rightarrow B$ seja sobrejetora, então $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, para todo $y \in B = \text{Im}(f)$. Assim, pelo Exercício 11,

$$\{f^{-1}(y)\}_{y \in B}$$

é uma partição de A . Logo, para qualquer $y \in B$, podemos escolher um

$$x = x(y) \in f^{-1}(y) \subseteq A.$$

Então a função $g : B \rightarrow A$ definida como $g(y) = x$ tem as propriedades desejadas, pois para qualquer $y \in B$, obtemos

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = I_B(y).$$

18. Pelo Exercício anterior temos que

$$\{f^{-1}(n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{2n - 1, 2n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

2. Primeiro note que dados $x, y \in A$,

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow y = (f^{-1} \circ f)(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{R} &\Leftrightarrow x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = (f^{-1} \circ f)(x) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (f^{-1} \circ f), \quad \forall (x, y) \in A \times A, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{R} = f^{-1} \circ f$. Suponhamos que $f \circ f = f$, então

$$\begin{aligned} y \in \bar{x} &\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) = (f \circ f)(y) = f(f(y)) \\ &\Rightarrow x = (f^{-1} \circ f)(f(y)) \\ &\Rightarrow f(y) \in \bar{x}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, dado $x \in A$, obtemos

$$\begin{aligned} x \in \bar{x} &\Rightarrow f(x) \in \bar{x} = (f^{-1} \circ f)(x) \\ &\Rightarrow (f \circ f)(x) = f(x). \end{aligned}$$

Portanto, $f \circ f = f$.

3. Pondo $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$. Para quaisquer $x, y, z \in A$, obtemos $x\mathcal{R}_i x$, para todo $i \in I$. Logo, $x\mathcal{R}x$. Se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $x\mathcal{R}_i y$, para todo $i \in I$. Como $y\mathcal{R}_i x$, para todo $i \in I$, temos que $(y, x) \in \mathcal{R}$, ou seja, se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$. Finalmente, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $x\mathcal{R}_i y$ e $y\mathcal{R}_i z$, para todo $i \in I$. Assim, $x\mathcal{R}_i z$, para todo $i \in I$. Portanto, $x\mathcal{R}z$, isto é, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre A .

4. Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{P}(B)$. É claro que $X\mathcal{R}X$ e se $X\mathcal{R}Y$, então $Y\mathcal{R}X$. Finalmente, se $X\mathcal{R}Y$ e $Y\mathcal{R}Z$, então

$$A \cap X = A \cap Y = A \cap Z.$$

Portanto, $X\mathcal{R}Z$, isto é, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{P}(B)$.

8. Para qualquer $a \in A$ fixado, a função $f_a : B \rightarrow B_a$ definida como $f_a(y) = (a, y)$, em que

$$B_a = \{(a, y) : y \in B\} = \{a\} \times B,$$

é claramente bijetora. Assim, pelo axioma ZF_7 , B_a é um conjunto, para todo $a \in A$. Como

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} B_a$$

temos, pelo axioma ZF_5 , que $A \times B$ é um conjunto. O conjunto B_a chama-se *faixa vertical*.

9. Sejam A e B conjuntos. Então, pelo Exercício anterior, $A \times B$ é um conjunto. Assim, pelo axioma ZF_6 , $\mathcal{P}(A \times B)$ é um conjunto. Como B^A é um subconjunto de $\mathcal{P}(A \times B)$ temos, pelo axioma ZF_4 , que B^A é um conjunto.
10. Vamos provar apenas o item (a). Para qualquer $f \in A^C \cup B^C$, obtemos $f \in A^C$ ou $f \in B^C$, ou seja, f é uma função de C em A ou f é uma função de C em B . Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$ temos, pelo Corolário 3.53, que f é uma função de C em $A \cup B$. Logo, $f \in (A \cup B)^C$. Portanto,

$$A^C \cup B^C \subseteq (A \cup B)^C.$$

11. É fácil verificar que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre A e que

$$f^{-1}(b) = \{x \in A : b = f(x)\} \neq \emptyset, \quad \forall b \in B,$$

pois $B = \text{Im}(f)$. Assim, se $b \in \text{Im}(f)$, então existe $x \in A$ tal que $b = f(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} f^{-1}(b) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= \{y \in A : f(x) = f(y)\} \\ &= \{y \in A : x\mathcal{R}y\} = \bar{x}. \end{aligned}$$

Portanto, as classes de equivalências são as imagens inversas de f . Neste caso, $\{f^{-1}(b)\}_{b \in B}$ é uma partição de A e o subconjunto $f^{-1}(b)$ chama-se *fibra sobre o elemento $b \in \text{Im}(f)$* .

Como $B_j \neq \emptyset$, para todo $j \in J$, e f é sobrejetora temos que

$$f^{-1}(B_j) = \{x \in A : f(x) \in B_j\} \neq \emptyset,$$

para todo $j \in J$. Sendo $f^{-1}(B_j) \subseteq A$, para todo $j \in J$, obtemos

$$\bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \subseteq A.$$

Por outro lado, para qualquer $x \in A$, temos, pelo item (b) do Exercício 1, que

$$\begin{aligned} f(x) \in f(A) = B = \bigcup_{j \in J} B_j \\ \Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j). \end{aligned}$$

ou seja,

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

Finalmente, se

$$x \in f^{-1}(B_j) \cap f^{-1}(B_k),$$

então

$$f(x) \in B_j \text{ e } f(x) \in B_k.$$

Logo, $B_j = B_k$, isto é, $f^{-1}(B_j) = f^{-1}(B_k)$. Portanto, $\{f^{-1}(B_j)\}_{j \in J}$ é uma partição de A .

Veja a prova do Exercício anterior.

Sejam A e B conjuntos. Então, pelo axioma ZF_5 , $A \cup B$ é um conjunto.

É fácil verificar que a função $f : A \cup B \rightarrow \{A, B\}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{se } x \in A - B \text{ e } A \not\subset B \\ B, & \text{se } x \notin A - B \text{ e } A \not\subset B \\ B, & \text{se } x \in B - A \text{ e } A \subset B \\ A, & \text{se } x \notin B - A \text{ e } A \subset B \end{cases}$$

é sobrejetora. Portanto, pelo axioma ZF_5 , $\{A, B\}$ é um conjunto.

é uma função tal que $f(i) \in B_i$, para todo $i \in I$. Como $B_i \subseteq A_i$ temos que $f(i) \in A_i$, para todo $i \in I$. Portanto,

$$f \in \prod_{i \in I} A_i, \text{ ou seja, } \prod_{i \in I} B_i \subseteq \prod_{i \in I} A_i.$$

3. Para qualquer $x \in A$, existem $i \in I$ e $j \in J$ tais que $x \in A_i$ e $x \in B_j$.

Logo, existe $(i, j) \in I \times J$ tal que $x \in A_i \cap B_j$, ou seja,

$$x \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

Portanto,

$$A \subseteq \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

4. Primeiro note que uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos não vazios de A é uma partição de A se as seguintes condições são satisfeitas:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ e } [A_i \cap A_j = \emptyset \text{ ou } A_i = A_j, \forall i, j \in I].$$

Agora, como $A_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$, e $B_j \neq \emptyset$, para todo $j \in J$, temos que $A_i \times B_j \neq \emptyset$, para todo $(i, j) \in I \times J$. Pelo item (d) do Exercício 10 da Seção 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) \\ &= \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j). \end{aligned}$$

Finalmente, se

$$(x, y) \in (A_i \times B_j) \cap (A_k \times B_l),$$

então

$$(x, y) \in (A_i \times B_j) \text{ e } (x, y) \in (A_k \times B_l).$$

Logo, $x \in A_i \cap A_k$ e $y \in B_j \cap B_l$, ou seja, $A_i \times B_j = A_k \cap B_l$. Portanto, a família

$$\{A_i \times B_j\}_{(i,j) \in I \times J}$$

é uma partição de $A \times B$

1. Note que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &= \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \text{ e} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.\end{aligned}$$

SEÇÃO 2.4

1. Vamos provar apenas o item (d). Como

$$\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq C_i, \quad \forall i \in I,$$

temos que

$$f\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) \subseteq f(C_i), \quad \forall i \in I.$$

Portanto,

$$f\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(C_i).$$

Como f é injetora temos que $f = i \circ g$, em que $i : f(A) \rightarrow B$ é a função inclusão e $g : A \rightarrow f(A)$ é uma função bijetora. Seja h a inversa de g . Então $f(X) = h^{-1}(X)$, para todo $X \subseteq A$. Portanto, pelo item (b), obtemos

$$\begin{aligned}f\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) &= h^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) \\ &= \bigcap_{i \in I} h^{-1}(C_i) \\ &= \bigcap_{i \in I} f(C_i).\end{aligned}$$

2. Note que se

$$f \in \prod_{i \in I} B_i,$$

então

$$f : I \rightarrow \bigcup B_i$$

11. Vamos provar apenas o item (d).

$$\begin{aligned}
 \forall (x, y) \quad [(x, y) &\in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ e } y \in \bigcup_{j \in J} B_j \\
 &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I \text{ tal que } x \in A_{i_0} \text{ e } \exists j_0 \in J \text{ tal que } y \in B_{j_0} \\
 &\Leftrightarrow \exists (i_0, j_0) \in I \times J \text{ tal que } (x, y) \in A_{i_0} \times B_{j_0} \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{(i, j) \in I \times J} (A_i \times B_j)].
 \end{aligned}$$

12. Vamos provar apenas o item (a).

$$\begin{aligned}
 \forall X \quad [X &\in \bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i) \Rightarrow \exists i \in I \text{ tal que } X \in \mathcal{P}(A_i) \\
 &\Rightarrow \exists i \in I \text{ tal que } X \subseteq A_i \\
 &\Rightarrow X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow X \in \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)].
 \end{aligned}$$

Note que se $A_1 = \{1\}$ e $A_2 = \{a, b\}$, então $\mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) \subset \mathcal{P}(A_1 \cup A_2)$.

13. Vamos provar apenas o item (c).

$$\begin{aligned}
 \forall X \quad [X &\in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \text{ e } X \in \mathcal{P}(B) \\
 &\Rightarrow X \subseteq A \text{ e } X \subseteq B \\
 &\Rightarrow X \subseteq A \cap B = \emptyset],
 \end{aligned}$$

o que é impossível. Portanto, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$. Reciprocamente,

$$\begin{aligned}
 \forall x \quad [x &\in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B \\
 &\Rightarrow \{x\} \subseteq A \text{ e } \{x\} \subseteq B \\
 &\Rightarrow \{x\} \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset],
 \end{aligned}$$

o que é impossível. Portanto, $A \cap B = \emptyset$.

6. Note que $A - B = A \cap B' \subseteq A$. Portanto, pelo axioma ZF_4 , $A - B$ é um conjunto.
7. Vamos provar apenas o item (a).

$$\begin{aligned} \forall x [x \in \bigcup_{i \in I} A_i &\Rightarrow \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i \\ &\Rightarrow x \in B]. \end{aligned}$$

pois $A_i \subseteq B$, para todo $i \in I$. Portanto, $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$.

8. Pelo item (a) e o item (b) do Exercício anterior, obtemos

$$X \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Por outro lado, pondo

$$Y = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

temos, pelo item (3) do Teorema 2.3, que

$$Y \subseteq A_i, \quad \forall i \in I.$$

Assim, pelo item (b), obtemos $Y \subseteq X$. Portanto,

$$X = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

9. Confira o Exercício 1 da Seção 2.2.

10. Vamos provar apenas o item (b).

$$\begin{aligned} \forall x [x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)' &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \\ &\Rightarrow \exists i \in I \text{ tal que } x \notin A_i \\ &\Rightarrow \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i' \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i'. \end{aligned}$$

SEÇÃO 2.3

1. Basta observar a relação entre elemento e conjunto.
2. Vamos provar apenas o item (e).

$$\begin{aligned}\forall (x, y) [(x, y) &\in (B \times A) \cap (C \times A') \\ &\Rightarrow (x, y) \in B \times A \text{ e } (x, y) \in C \times A' \\ &\Rightarrow y \in A \text{ e } y \notin A],\end{aligned}$$

o que é impossível. Portanto, $(B \times A) \cap (C \times A') = \emptyset$.

3. Vamos provar apenas o item (b).

$$\begin{aligned}\forall (x, y) [(x, y) &\in H \circ G \Rightarrow \exists z \text{ tal que } (x, z) \in G \text{ e } (z, y) \in H \\ &\Rightarrow (x, z) \in A \times B \text{ e } (z, y) \in B \times C \\ &\Rightarrow x \in A \text{ e } y \in C \\ &\Rightarrow (x, y) \in A \times C].\end{aligned}$$

Portanto, $H \circ G \subseteq A \times C$.

4. Vamos provar apenas o item (a).

$$\begin{aligned}\forall (x, y) [(x, y) &\in G|_B \Leftrightarrow (x, y) \in G \text{ e } x \in B \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G \text{ e } (x, y) \in B \times \text{Im}(G) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G \cap (B \times \text{Im}(G))].\end{aligned}$$

Portanto, $G|_B = G \cap (B \times \text{Im}(G))$.

5. Note que

$$\begin{aligned}\forall (x, y) [(x, y) &\in G^{-1} \Rightarrow (y, x) \in G \\ &\Rightarrow (y, x) \in \text{Im}(G) \times \text{Dom}(G)].\end{aligned}$$

Assim, $G^{-1} \subseteq \text{Im}(G) \times \text{Dom}(G)$. Portanto, pelo axioma ZF_4 , G^{-1} é um conjunto.

Vamos provar apenas o item (a).

$$\begin{aligned}\forall x [x &\in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B - A) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B - A)].\end{aligned}$$

Portanto, $A \cup B = A \cup (B - A)$. Note que

$$\begin{aligned}\forall x [x &\in A \cap (B - A) \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B - A \\ &\Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin A],\end{aligned}$$

o que é impossível. Portanto, $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Vamos provar apenas os itens (f) e (g): (f) Pelos itens (6), (7) e (8) do Teorema 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}(A + B)' &= [(A \cap B') \cup (A' \cap B)]' \\ &= (A \cap B')' \cap (A' \cap B)' \\ &= (A' \cup B) \cap (A \cup B') \\ &= (A \cap B) \cup (A' \cap B').\end{aligned}$$

(g) Novamente, pelos itens (7) e (8) do Teorema 2.3 e o item (f), obtemos

$$\begin{aligned}A + (B + C) &= (A \cap (B + C)') \cup (A' \cap (B + C)) \\ &= (A \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]) \\ &\quad \cup (A' \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \\ &\quad \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C).\end{aligned}$$

Como esta expressão é simétrica em relação A , B e C temos, pelo item (f), que

$$A + (B + C) = C + (A + B) = (A + B) + C.$$

29. Seja $f : A \rightarrow A$ uma função injetora tal que $f(A) \neq A$. Tomando $x \in A - f(A)$, mostre que $x, f(x), f(f(x)), \dots$ são distintos aos pares.
30. Seja $f : A \rightarrow A$ uma função injetora, com A um conjunto finito. Mostre que f é sobrejetora.

RESPOSTAS E/OU SOLUÇÕES

SEÇÃO 2.2

- Pelo item (a), obtemos $A \cup B \subseteq X$. Por outro lado, pondo $Y = A \cup B$, temos, pelo item (2) do Teorema 2.3, que $A \subseteq Y$ e $B \subseteq Y$. Assim, pelo item (b), obtemos $X \subseteq Y = A \cup B$. Portanto, $X = A \cup B$.
- Sejam A, B subconjuntos de U e X um subconjunto de U com as seguintes propriedades:
 - $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$.
 - Se $Y \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, então $Y \subseteq X$, para todo $Y \subseteq U$.

Mostre que $X = A \cap B$. Agora, faça a prova.

3. Vamos provar apenas o item (a).

$$\begin{aligned} \forall x [x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in C \\ \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in D \Rightarrow x \in B \cup D]. \end{aligned}$$

Portanto, $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.

4. Vamos provar apenas o item (j).

$$\begin{aligned} \forall x [x \in A \cap (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ e } x \notin A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C). \end{aligned}$$

Portanto, $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

